Pitkittäis- ja paneeliaineistojen analysointi
Laskuharjoitus 6

2014, Huhtikuu 23

1 Laskutehtäviä

1. Tarkastellaan satunnaisvaikutusmallia (random effects model)

$$\begin{aligned} Y_i &= X_i\beta + v_i, \\ v_i &= c_i j_T + u_i, \end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, N$, missä Y_i, v_i, u_i ovat $T \times 1$-vektoreita, X_i on $T \times K$-matriisi, β on $K \times 1$-vektori, $c_i \in \mathbf{R}$ ja j_T on $T \times 1$-vektori, jonka elementit ovat 1. Oletetaan, että

   (a) i. $E(u_{it} \,|\, X_i, c_i) = 0$,
   ii. $E(c_i \,|\, X_i) = E(c_i) = 0$,

   (b) $E(X_i' \Omega^{-1} X_i)$ on kääntyvä, missä $\Omega = E(v_i v_i')$,

   (c) i. $E(u_i u_i' \,|\, X_i, c_i) = \sigma_u^2 I_T$,
   ii. $E(c_i^2 \,|\, X_i) = \sigma_c^2$.

   Oletetaan, että (X_i, Y_i, c_i) ovat i.i.d.

   (a) Osoita, että
$$\frac{1}{N}\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T} v_{it}^2 \xrightarrow{p} \sigma_c^2 + \sigma_u^2,$$
   kun $N \to \infty$.

   (b) Osoita, että
$$\frac{1}{N}\frac{1}{T(T-1)/2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T-1}\sum_{s=t+1}^{T} v_{it}v_{is} \xrightarrow{p} \sigma_c^2,$$
   kun $N \to \infty$.

2. Tarkastellaan satunnaisvaikutusmallia (random effects model)

$$\begin{aligned} Y_i &= X_i\beta + v_i, \\ v_i &= c_i j_T + u_i, \end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, N$, missä Y_i, v_i, u_i ovat $T \times 1$-vektoreita, X_i on $T \times K$-matriisi, β on $K \times 1$-vektori, $c_i \in \mathbf{R}$ ja j_T on $T \times 1$-vektori, jonka elementit ovat 1. Oletetaan, että

(a) i. $E(u_{it} \,|\, X_i, c_i) = 0$,
   ii. $E(c_i \,|\, X_i) = E(c_i) = 0$,

(b) $E(X_i'\Omega^{-1}X_i)$ on kääntyvä, missä $\Omega = E(v_i v_i')$,

(c) i. $E(u_i u_i' \,|\, X_i, c_i) = \sigma_u^2 I_T$,
   ii. $E(c_i^2 \,|\, X_i) = \sigma_c^2$.

Oletetaan, että (X_i, Y_i, c_i) ovat i.i.d. Olkoon

$$\hat{\hat{v}}_{it} = Y_{it} - X_{it}\hat{\beta}_{POLS}.$$

Osoita, että

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{1}{N}\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\hat{\hat{v}}_{it}^2 \xrightarrow{p} \sigma_c^2 + \sigma_u^2,$$

kun $N \to \infty$. Ohje: Kirjoita

$$\hat{\hat{v}}_{it} = v_{it} + \hat{\hat{v}}_{it} - v_{it} = v_{it} + X_{it}(\hat{\beta}_{POLS} - \beta)$$

ja käytä hyväksi sitä, että $\hat{\beta}_{POLS} \xrightarrow{p} \beta$, kun $N \to \infty$.

3. Olkoon

$$Q_T = I_T - j_T(j_T'j_T)^{-1}j_T',$$

missä I_T on $T \times T$ identiteettimatriisi ja j_T on $T \times 1$ vektori, jonka elementit ovat 1. Osoita, että

(a) $Q_T j_T = 0$,

(b) $Q_T' = Q_T$,

(c) $Q_T^2 = Q_T$,

(d) $Q_T' Q_T = Q_T$,

(e) $\text{rank}(Q_T) \leq T - 1$.

4. Tarkastellaan lineaarista mallia

$$Y_{it} = X_{it}\beta + c_i + u_{it},$$

$t = 1, 2$, $Y_{it}, X_{it}, \beta, c_i, u_{it} \in \mathbf{R}$. Olkoon kiinteitten vaikutusten estimattori (fixed effects estimator)

$$\hat{\beta}_{FE} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{2}(Y_{it} - \bar{Y}_i)(X_{it} - \bar{X}_i)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{2}(X_{it} - \bar{X}_i)^2}.$$

Olkoon aika-erotus estimaattori (first difference estimator)

$$\hat{\beta}_{FD} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(Y_{i2} - Y_{i1})(X_{i2} - X_{i1})}{\sum_{i=1}^{N}(X_{i2} - X_{i1})^2}.$$

Osoita, että

$$\hat{\beta}_{FE} = \hat{\beta}_{FD}.$$

2 Tietokonetehtäviä

Tutkitaaan aineistoa cornwell.raw, jossa on muuttujat

```
                storage  display     value
variable name     type   format      label      variable label
-------------------------------------------------------------------------------
county            int    %9.0g                  county identifier
year              byte   %9.0g                  81 to 87
crmrte            float  %9.0g                  crimes committed per person
prbarr            float  %9.0g                  'probability' of arrest
prbconv           float  %9.0g                  'probability' of conviction
prbpris           float  %9.0g                  'probability' of prison sentenc
avgsen            float  %9.0g                  avg. sentence, days
polpc             float  %9.0g                  police per capita
density           float  %9.0g                  people per sq. mile
taxpc             float  %9.0g                  tax revenue per capita
west              byte   %9.0g                  =1 if in western N.C.
central           byte   %9.0g                  =1 if in central N.C.
urban             byte   %9.0g                  =1 if in SMSA
pctmin80          float  %9.0g                  perc. minority, 1980
wcon              float  %9.0g                  weekly wage, construction
wtuc              float  %9.0g                  wkly wge, trns, util, commun
```

```
wtrd            float   %9.0g                  wkly wge, whlesle, retail trade
wfir            float   %9.0g                  wkly wge, fin, ins, real est
wser            float   %9.0g                  wkly wge, service industry
wmfg            float   %9.0g                  wkly wge, manufacturing
wfed            float   %9.0g                  wkly wge, fed employees
wsta            float   %9.0g                  wkly wge, state employees
wloc            float   %9.0g                  wkly wge, local gov emps
mix             float   %9.0g                  offense mix: face-to-face/other
pctymle         float   %9.0g                  percent young male
d82             byte    %9.0g                  =1 if year == 82
d83             byte    %9.0g                  =1 if year == 83
d84             byte    %9.0g                  =1 if year == 84
d85             byte    %9.0g                  =1 if year == 85
d86             byte    %9.0g                  =1 if year == 86
d87             byte    %9.0g                  =1 if year == 87
lcrmrte         float   %9.0g                  log(crmrte)
lprbarr         float   %9.0g                  log(prbarr)
lprbconv        float   %9.0g                  log(prbconv)
lprbpris        float   %9.0g                  log(prbpris)
lavgsen         float   %9.0g                  log(avgsen)
lpolpc          float   %9.0g                  log(polpc)
ldensity        float   %9.0g                  log(density)
ltaxpc          float   %9.0g                  log(taxpc)
lwcon           float   %9.0g                  log(wcon)
lwtuc           float   %9.0g                  log(wtuc)
lwtrd           float   %9.0g                  log(wtrd)
lwfir           float   %9.0g                  log(wfir)
lwser           float   %9.0g                  log(wser)
lwmfg           float   %9.0g                  log(wmfg)
lwfed           float   %9.0g                  log(wfed)
lwsta           float   %9.0g                  log(wsta)
lwloc           float   %9.0g                  log(wloc)
lmix            float   %9.0g                  log(mix)
lpctymle        float   %9.0g                  log(pctymle)
lpctmin         float   %9.0g                  log(pctmin)
clcrmrte        float   %9.0g                  lcrmrte - lcrmrte[_n-1]
clprbarr        float   %9.0g                  lprbarr - lprbarr[_n-1]
clprbcon        float   %9.0g                  lprbconv - lprbconv[_n-1]
clprbpri        float   %9.0g                  lprbpri - lprbpri[t-1]
clavgsen        float   %9.0g                  lavgsen - lavgsen[t-1]
clpolpc         float   %9.0g                  lpolpc - lpolpc[t-1]
```

```
cltaxpc          float  %9.0g                ltaxpc - ltaxpc[t-1]
clmix            float  %9.0g                lmix - lmix[t-1]
```

Lue data R:ään komennoilla

```
file<-"http://cc.oulu.fi/~jklemela/panel/cornwell.raw"
data<-read.table(file=file)
```

Lue data SAS:iin komennoilla (Huom. lisää tarvittavat muuttujat INPUT-riville).

```
FILENAME myurl URL 'http://cc.oulu.fi/~jklemela/panel/cornwell.raw';
DATA cornwell;
   INFILE myurl firstobs=1;
   INPUT county year crmrte prbarr prbconv prbpris avgsen;
RUN;
```

5a. Estimoi lineaarinen malli SGLS-estimaattorilla käyttäen kaikkia vuosia 81-87. Mallissa vastemuuttuja on log(*crmrte*) ja selittävät muuttujat ovat log(*prbarr*), log(*prbconv*), log(*prbpris*), log(*avgsen*) ja log(*polpc*).

    Ohje: Matriisin Ω estimaattorin saat edellisen viikon laskuharjoituksen tehtävästä 5. Tehtävä voidaan esimerkiksi ratkaista kirjoittamalla estimaattori

$$\hat{\beta}_{SGLS} = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i' \hat{\Omega}^{-1} X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} X_i' \hat{\Omega}^{-1} Y_i \right)$$

    muotoon

$$\hat{\beta}_{SGLS} = (\mathcal{X}' O \mathcal{X})^{-1} \mathcal{X}' O \mathcal{Y},$$

    missä $\mathcal{X}$ on $TN \times K$-matriisi, jossa $T \times K$-matriisit X_i ovat päällekkäin, $\mathcal{Y}$ on $TN \times 1$-vektori, jossa $T \times 1$ vektorit Y_i ovat päällekkäin ja O on $TN \times TN$-matriisi, joka on blokkidiagonaalinen ja diagonaalilla ovat matriisit Ω^{-1}:

$$O = I_N \otimes \hat{\Omega}^{-1},$$

    missä I_N on $N \times N$ identiteettimatriisi.

5b. Estimoi

$$\text{Avar}(\hat{\beta}_{SGLS}) = \frac{1}{N} A^{-1} B A^{-1},$$

    missä $A = E(X_i' \Omega^{-1} X_i)$, $B = E(X_i' \Omega^{-1} u_i u_i' \Omega^{-1} X_i)$ ja $\Omega = E u_i u_i'$. Mallissa vastemuuttuja on log(*crmrte*) ja selittävät muuttujat ovat

$\log(prbarr)$, $\log(prbconv)$, $\log(prbpris)$, $\log(avgsen)$ ja $\log(polpc)$. Laske asymptoottiseen varianssiin perustuvat t-testisuuren arvot.

Ohje: Matriisin Ω estimaattorin saat edellisen viikon laskuharjoituksen tehtävästä 5 ja

$$\hat{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i' \hat{\Omega}^{-1} X_i$$

sekä

$$\hat{B} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} X_i' \hat{\Omega}^{-1} \hat{u}_i \hat{u}_i' \hat{\Omega}^{-1} X_i,$$

missä

$$\hat{u}_i = Y_i - X_i \hat{\beta}_{SGLS}.$$

3 Kertauskysymyksiä (eivät kuulu laskuharjoitukseen)

1. Olkoon

$$Y_{it} = X_{it}\beta + u_{it},$$

$i = 1, \ldots, N$, $t = 2, \ldots, T$, missä X_{it} on $1 \times K$-vektori, β on $K \times 1$-vektori, ja $Y_{it}, u_{it} \in \mathbf{R}$. Olkoon

$$u_{it} = \rho u_{i,t-1} + e_t,$$

missä

$$E(e_{it} \mid X_{it}, u_{i,t-1}, X_{i,t-1}, u_{i,t-2}, \ldots) = 0.$$

Selitä miten hypoteesia

$$H_0 : \rho = 0$$

voidaan testata.

2. Tarkastellaan satunnaisvaikutusmallia (random effects model)

$$\begin{aligned} Y_i &= X_i\beta + v_i, \\ v_i &= c_i j_T + u_i, \end{aligned}$$

$i = 1, \ldots, N$, missä Y_i, v_i, u_i ovat $T \times 1$-vektoreita, X_i on $T \times K$-matriisi, β on $K \times 1$-vektori, $c_i \in \mathbf{R}$ ja j_T on $T \times 1$-vektori, jonka elementit ovat 1. Oletetaan, että

(a) i. $E(u_{it} \mid X_i, c_i) = 0$,

ii. $E(c_i \mid X_i) = E(c_i) = 0$,

(b) $E(X_i'\Omega^{-1}X_i)$ on kääntyvä, $\Omega = E(v_i v_i')$,

(c) i. $E(u_i u_i' \mid X_i, c_i) = \sigma_u^2 I_T$,

ii. $E(c_i^2 \mid X_i) = \sigma_c^2$.

Osoita, että

$$\Omega = E(v_i v_i') = \sigma_u^2 I_T + \sigma_c^2 j_T j_T'.$$

Määrittele estimaattorit parametreille σ_u^2 ja σ_c^2.

Tarkastelu johtaa estimaattoriin

$$\hat{\beta}_{RE} = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i'\hat{\Omega}^{-1}X_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} X_i'\hat{\Omega}^{-1}Y_i \right)^{-1},$$

missä

$$\hat{\Omega} = \hat{\sigma}_u^2 I_T + \hat{\sigma}_c^2 j_T j_T'.$$